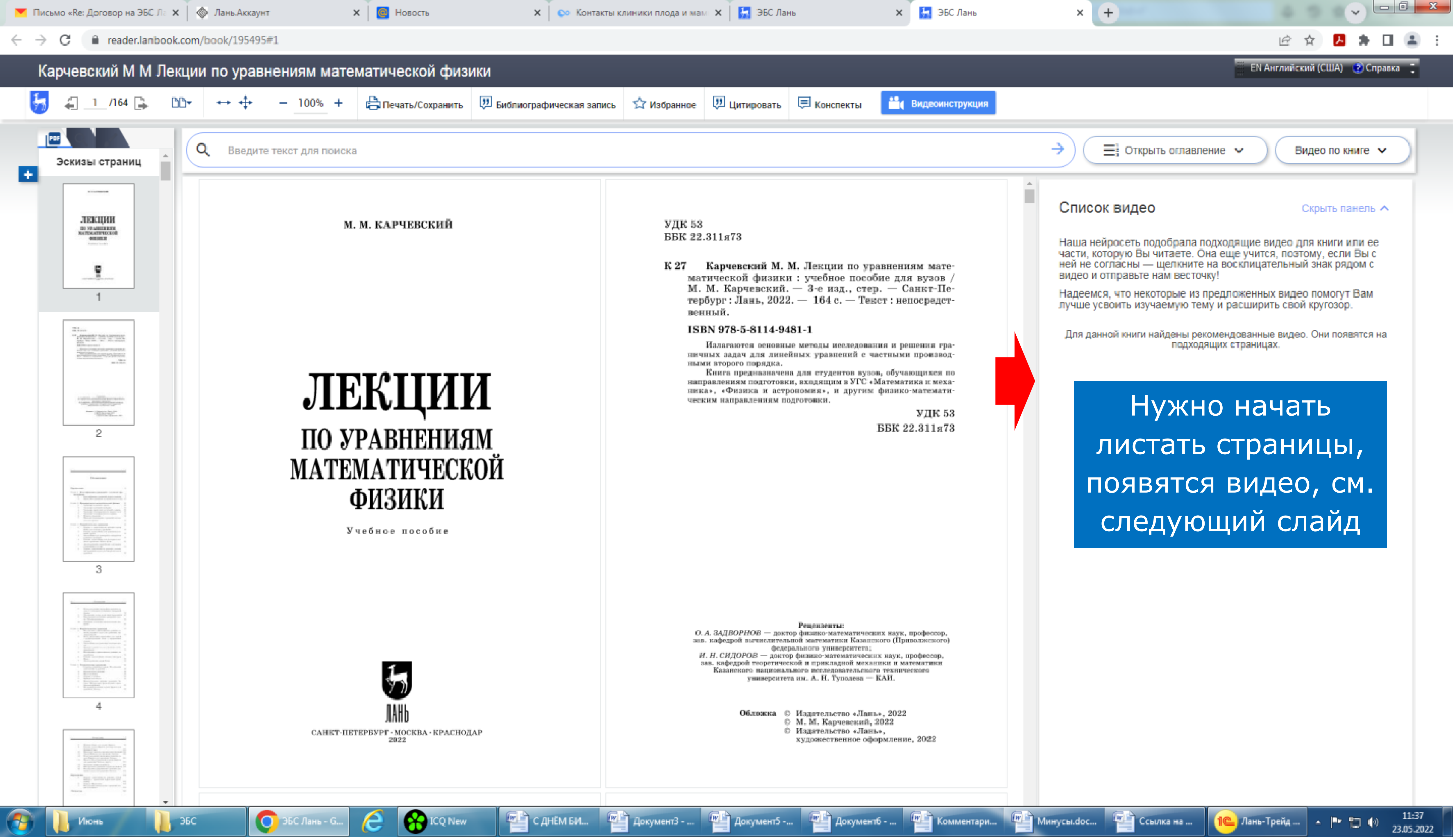
reader.lanbook.com/book/195495#1
Карчевский М М Лекции по уравнениям математической физики
Печать/Сохранить
Библиографическая запись
Избранное
Цитировать
Конспекты
Видеоинструкция
Эскизы страниц
Введите текст для поиска
Открыть оглавление
Видео по книге
М. М. КАРЧЕВСКИЙ
ЛЕКЦИИ
ПО УРАВНЕНИЯМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
Учебное пособие
ЛАНЬ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГ · МОСКВА · КРАСНОДАР
2022
УДК 53
ББК 22.311я73
К 27 Карчевский М. М. Лекции по уравнениям математической физики : учебное пособие для вузов / М. М. Карчевский. — 3-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 164 с. — Текст : непосредственный.
ISBN 978-5-8114-9481-1
Излагаются основные методы исследования и решения граничных задач для линейных уравнений с частными производными второго порядка.
Книга предназначена для студентов вузов, обучающихся по направлениям подготовки, входящим в УГС «Математика и механика», «Физика и астрономия», и другим физико-математическим направлениям подготовки.
УДК 53
ББК 22.311я73
Список видео
Скрыть панель
Наша нейросеть подобрала подходящие видео для книги или ее части, которую Вы читаете. Она еще учится, поэтому, если Вы с ней не согласны — щелкните на восклицательный знак рядом с видео и отправьте нам весточку!
Надеемся, что некоторые из предложенных видео помогут Вам лучше усвоить изучаемую тему и расширить свой кругозор.
Для данной книги найдены рекомендованные видео. Они появятся на подходящих страницах.
Нужно начать листать страницы, появятся видео, см. следующий слайд
11:37
23.05.2022

Глава 1

КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

1. Классификация уравнений второго порядка. В самом общем случае линейное уравнение с частными производными второго порядка может быть записано в виде:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u = f. \tag{1.1}$$

Здесь $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, $u(x) = u(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, u — искомая дважды непрерывно дифференцируемая функция n вещественных переменных, a_{ij}, a_i, a_0 — заданные функции, называемые коэффициентами уравнения, f — также заданная функция — правая часть уравнения. Если $f \equiv 0$, уравнение называется однородным, в противном случае — неоднородным. Не нарушая общности, можно считать, что коэффициенты при вторых производных симметричны, т. е. $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. В самом деле, слагаемые с фиксированными индексами i, j можно записать в виде:

$$a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + a_{ji}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} = \\ = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Мы учли при этом, что для дважды непрерывно дифференцируемой функции u справедливо равенство

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}.$$

При исследовании и решении уравнений вида (1.1) довольно часто приходится прибегать к замене независимых переменных.

Будем считать, что новые переменные $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ вводятся при помощи соотношений

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \xi_2 &= \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \xi_n &= \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ предполагаются дважды непрерывно дифференцируемыми в некоторой области Ω. Будем считать также соответствие (1.2) между переменными ξ и x взаимно однозначным. Тогда матрица Якоби

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

невырождена в области Ω, т. е. $\det J(x) \neq 0$ при $x \in \Omega$.

Выразим в уравнении (1.1) производные по $x_1, x_2, \ldots x_n$ через производные по новым переменным. По правилу дифференцирования сложных функций

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \xi_j}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_l}\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial \xi_l}\frac{\partial^2 \varphi_l}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Подставляя полученные выражения в уравнение (1.1), будем иметь:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\sum_{k,l=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_l}\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} + \\ + F\left(u, \frac{\partial u}{\partial \xi_1}, \frac{\partial u}{\partial \xi_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial \xi_n}\right) = 0, \tag{1.3}$$

где слагаемое

$$F\left(u, \frac{\partial u}{\partial \xi_1}, \frac{\partial u}{\partial \xi_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial \xi_n}\right)$$

С. Н. НИКИФОРОВ

ПРИКЛАДНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Учебное пособие

Издание второе, стереотипное

1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

Лабораторная работа «Вычисление определённого интеграла» выполняется в среде **Excel**, в среде **VBA** и с использованием пользовательской формы **Userform**.

Значение определённого интеграла вычисляется методом левых прямоугольников, методом трапеций и методом Симпсона.

1.1. Метод прямоугольников

Вычисление определённого интеграла

$$\int_a^b f(x)dx \qquad (1.1.1)$$

в геометрической интерпретации адекватно вычислению площади фигуры, ограниченной осью абсцисс, ординатами, восстановленными из точек оси абсцисс, соответствующих пределам интегрирования, и отрезком подынтегральной функции, рис. 1.1.1.