

Введите текст для поиска [Поиск] [Открыть оглавление] [Видео по книге]

М. М. КАРЧЕВСКИЙ

# ЛЕКЦИИ ПО УРАВНЕНИЯМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Учебное пособие



ЛАНЬ  
САНКТ-ПЕТЕРБУРГ · МОСКВА · КРАСНОДАР  
2022

УДК 53  
ББК 22.311я73

**К 27 Карчевский М. М. Лекции по уравнениям математической физики : учебное пособие для вузов / М. М. Карчевский. — 3-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 164 с. — Текст : непосредственный.**

**ISBN 978-5-8114-9481-1**

Излагаются основные методы исследования и решения граничных задач для линейных уравнений с частными производными второго порядка.

Книга предназначена для студентов вузов, обучающихся по направлениям подготовки, входящим в УГС «Математика и механика», «Физика и астрономия», и другим физико-математическим направлениям подготовки.

УДК 53  
ББК 22.311я73

**Рецензенты:**  
**О. А. ЗАДВОРНОВ** — доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой вычислительной математики Казанского (Приволжского) федерального университета;  
**И. Н. СИДОРОВ** — доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой теоретической и прикладной механики и математики Казанского национального исследовательского технического университета им. А. И. Туполева — КНИТУ.

Обложка © Издательство «Лань», 2022  
 © М. М. Карчевский, 2022  
 © Издательство «Лань», художественное оформление, 2022



### Список видео

Скрыть панель ^

Наша нейросеть подобрала подходящие видео для книги или ее части, которую Вы читаете. Она еще учится, поэтому, если Вы с ней не согласны — щелкните на восклицательный знак рядом с видео и отправьте нам весточку!

Надеемся, что некоторые из предложенных видео помогут Вам лучше усвоить изучаемую тему и расширить свой кругозор.

Для данной книги найдены рекомендованные видео. Они появятся на подходящих страницах.

Нужно начать листать страницы, появятся видео, см. следующий слайд

Введите текст для поиска

Открыть оглавление

Видео по книге

## ГЛАВА 1 КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

**1. Классификация уравнений второго порядка.** В самом общем случае линейное уравнение с частными производными второго порядка может быть записано в виде:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u = f. \quad (1.1)$$

Здесь  $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ ,  $u(x) = u(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ ,  $u$  — искомая дважды непрерывно дифференцируемая функция в вещественных переменных,  $a_{ij}$ ,  $a_i$ ,  $a_0$  — заданные функции, называемые коэффициентами уравнения,  $f$  — также заданная функция — правая часть уравнения. Если  $f = 0$ , уравнение называется однородным, в противном случае — неоднородным. Не нарушая общности, можно считать, что коэффициенты при вторых производных симметричны, т. е.  $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . В самом деле, слагаемые с фиксированными индексами  $i, j$  можно записать в виде:

$$\begin{aligned} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + a_{ji} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} &= \\ &= \frac{1}{2} (a_{ij} + a_{ji}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2} (a_{ij} + a_{ji}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}. \end{aligned}$$

Мы учли при этом, что для дважды непрерывно дифференцируемой функции  $u$  справедливо равенство

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}.$$

При исследовании и решении уравнений вида (1.1) довольно часто приходится прибегать к замене независимых переменных.

### Глава 1. Классификация уравнений

Будем считать, что новые переменные  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  вводятся при помощи соотношений

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \xi_2 &= \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\dots \\ \xi_n &= \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Функции  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  предполагаются дважды непрерывно дифференцируемыми в некоторой области  $\Omega$ . Будем считать также соответствие (1.2) между переменными  $\xi$  и  $x$  взаимно однозначным. Тогда матрица Якоби

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

невырождена в области  $\Omega$ , т. е.  $\det J(x) \neq 0$  при  $x \in \Omega$ .

Выразим в уравнении (1.1) производные по  $x_1, x_2, \dots, x_n$  через производные по новым переменным. По правилу дифференцирования сложных функций

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial \xi_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_l} \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^n \frac{\partial u}{\partial \xi_l} \frac{\partial^2 \varphi_l}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Подставляя полученные выражения в уравнение (1.1), будем иметь:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_l} \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} + \\ + F \left( u, \frac{\partial u}{\partial \xi_1}, \frac{\partial u}{\partial \xi_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial \xi_n} \right) = 0, \quad (1.3) \end{aligned}$$

где слагаемое

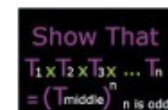
$$F \left( u, \frac{\partial u}{\partial \xi_1}, \frac{\partial u}{\partial \xi_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial \xi_n} \right)$$

### Список видео

Скрыть панель

Наша нейросеть подобрала подходящие видео для книги или ее части, которую Вы читаете. Она еще учится, поэтому, если Вы с ней не согласны — щелкните на восклицательный знак рядом с видео и отправьте нам весточку!

Надеемся, что некоторые из предложенных видео помогут Вам лучше усвоить изучаемую тему и расширить свой кругозор.



Geometrical Progression - Product of n terms is nth power of middle term - Hard Problem



Матрицы и определители



FINALLY! Why we divide by N-1 for Sample Variance and Standard Deviation



#162. УБОЙНАЯ ЗАДАЧА С ПАРАМЕТРОМ!



Explanation of 5' and 3' C terminus, and N terminus | MIT 7.01SC Fundamentals of Biology



Открыть оглавление

Видео по книге

## Эскизы страниц



1



2



3



4



5

**С. Н. НИКИФОРОВ**

# ПРИКЛАДНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

*Учебное пособие*  
Издание второе, стереотипное

**Список видео**[Скрыть панель ^](#)

Наша нейросеть подобрала подходящие видео для книги или ее части, которую Вы читаете. Она еще учится, поэтому, если Вы с ней не согласны — щелкните на восклицательный знак рядом с видео и отправьте нам весточку!

Надеемся, что некоторые из предложенных видео помогут Вам лучше усвоить изучаемую тему и расширить свой кругозор.

Для данной книги найдены рекомендованные видео. Они появятся на подходящих страницах.

Введите текст для поиска

Открыть оглавление

Видео по книге

# 1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

Лабораторная работа «Вычисление определённого интеграла» выполняется в среде **Excel**, в среде **VBA** и с использованием пользовательской формы **Userform**.

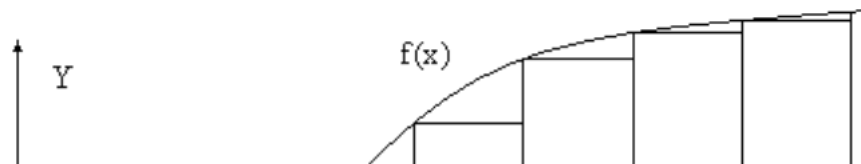
Значение определённого интеграла вычисляется методом левых прямоугольников, методом трапеций и методом Симпсона.

## 1.1. Метод прямоугольников

Вычисление определённого интеграла

$$\int_a^b f(x)dx \quad (1.1.1)$$

в геометрической интерпретации адекватно вычислению площади фигуры, ограниченной осью абсцисс, ординатами, восстановленными из точек оси абсцисс, соответствующих пределам интегрирования, и отрезком подынтегральной функции, рис. 1.1.1.

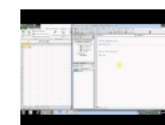


### Список видео

Скрыть панель

Наша нейросеть подобрала подходящие видео для книги или ее части, которую Вы читаете. Она еще учится, поэтому, если Вы с ней не согласны — щелкните на восклицательный знак рядом с видео и отправьте нам весточку!

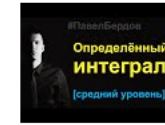
Надеемся, что некоторые из предложенных видео помогут Вам лучше усвоить изучаемую тему и расширить свой кругозор.



Нахождение определенного интеграла заданной функции с помощью VBA в Excel



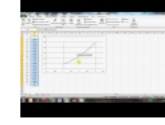
Определённый интеграл с переменным верхним пределом. Тема



Определённый интеграл — понятие и вычисление



Метод прямоугольников для нахождения определенного интеграла



Нахождение определенного интеграла функции с помощью датчика случайных чисел

